Déterminants

Le déterminant est un outil qui caractérise, par un calcul, l'inversibilité d'une matrice carrée.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. n et p désignent des entiers naturels non nuls.

I. Applications multilinéaires

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1°) Définition

Déf : On appelle application n-linéaire de E vers F toute application $\varphi : \begin{cases} E^n \to F \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \varphi(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables i.e. : $\forall (x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,x_n) \in E^{n-1}$ l'application partielle $\varphi_i : \begin{cases} E \to F \\ x_i \mapsto \varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \end{cases}$ est linéaire.

Quand $n = 2$, on parle d'application bilinéaire.
Quand $F = \mathbb{K}$, on parle de forme n linéaire.

Prop : Soit φ une application n-linéaire de E vers F et $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$.
Si l'un des $x_1,\dots,x_n$ est nul alors $\varphi(x_1,\dots,x_n) = 0$.

2°) Applications multilinéaires symétriques et antisymétriques

Déf : Soit φ une application n-linéaire de E vers F
On dit que φ est symétrique (resp. antisymétrique) ssi
$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n, \varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_1,\dots,x_n)$
(resp. $\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\dots,x_n)$)
On note $S_n(E,F)$ (resp. $A_n(E,F)$) l'ensemble de ces applications.

Prop : Soit φ une application n-linéaire de E vers F.
On a équivalence entre :
(i) φ est symétrique (resp. antisymétrique)
(ii) $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$ et pour toute transposition τ de $\{1,\dots,n\}$:
$\varphi(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)}) = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ (resp. $\varphi(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)}) = -\varphi(x_1,\dots,x_n)$)

3°) Application multilinéaire alternée

Déf : Soit φ une application n-linéaire de E vers F.
On dit que φ est alternée ssi pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, s'il existe $1 \le i \ne j \le n$ tel que $x_i = x_j$ alors $\varphi(x_1,\dots,x_n) = 0$, autrement dit φ s'annule sur tout famille contenant deux fois le même vecteur.
On note $\Lambda_n(E,F)$ l'ensemble de ces applications.
Si $F = \mathbb{K}$, on notera $\Lambda_n^*(E)$ au lieu de $\Lambda_n(E,\mathbb{K})$.

Prop : Soit φ une application n-linéaire alternée de E vers F.
Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée de vecteurs de E alors $\varphi(x_1,\dots,x_n) = 0$.

Théorème :
Soit φ une application n-linéaire alternée de E vers F.
On a équivalence entre :
(i) φ est antisymétrique
(ii) φ est alternée.

II. Déterminants

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1°) Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

Déf : Soit $\mathcal{F}=(x_1,\dots,x_n)$ une famille de $n=\dim E$ vecteurs de E et $A=(a_{i,j})=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)\in M_n(\mathbb{K})$.
On appelle déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}\mathcal{F}=\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}\ .$$

Prop : On a $\det_{\mathcal{B}}\mathcal{B}=1$.

Théorème : (admis)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$.
L'application $\det_{\mathcal{B}}:E^n\to\mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée non nulle De plus, l'ensemble $\Lambda_n^*(E)$ des formes n linéaires alternées sur E est une droite vectorielle.

Cor : Il en découle :
$\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire en chacune de ses variables,
$\det_{\mathcal{B}}$ s'annule sur les familles liées,
$\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique
$\det_{\mathcal{B}}$ est vecteur directeur de $\Lambda_n^*(E)$ i.e. : $\forall\varphi\in\Lambda_n^*(E),\exists!\lambda\in\mathbb{K},\varphi=\lambda.\det_{\mathcal{B}}$.

Prop : Soit $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une nouvelle base de E. On a
$\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\det_{\mathcal{B}'}(x_1,\dots,x_n)=\det_{\mathcal{B}'}\mathcal{B}.\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$.

Théorème :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$.
Soit $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une famille de vecteurs de E.
On a équivalence entre :
(i) $\mathcal{B}'$ est une base de E.
(ii) $\det_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'\neq 0$.

2°) Déterminant d'un endomorphisme

a) définition

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $f\in\mathcal{L}(E)$. Notons $\delta=\det_{\mathcal{B}}(f(e_1),\dots,f(e_n))$

Prop : $\forall\varphi\in\Lambda_n^*(E),\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\varphi(f(x_1),\dots,f(x_n))=\delta\varphi(x_1,\dots,x_n)$

Prop : La quantité $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1),\dots,f(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$.

Déf : On appelle déterminant de l'endomorphisme f le scalaire $\det f=\det_{\mathcal{B}}(f(e_1),\dots,f(e_n))$.

b) propriétés

Prop : $\det(\mathrm{Id}_E)=1$.

Prop : $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall f\in\mathcal{L}(E),\det(\lambda.f)=\lambda^n\det f$.

Théorème :
$\forall f,g\in\mathcal{L}(E),\det(g\circ f)=\det g\times\det f$.

Théorème :
Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :
(i) f est un automorphisme de E.
(ii) $\det f\neq 0$.
De plus si tel est le cas $\det f^{-1}=1/\det f$.

Cor : L'application $\det:\begin{cases}GL(E)\to\mathbb{K}^*\\ f\mapsto\det f\end{cases}$ est un morphisme de groupes.

Déf : Le noyau de ce morphisme est noté $SL(E)=\{f\in\mathcal{L}(E)/\det f=1\}$.
On l'appelle groupe spécial linéaire de E.

3°) Déterminant d'une matrice carrée

a) définition

Déf : On appelle déterminant de la matrice $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{K})$ le scalaire : $\det A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}$.

On note encore : $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}_{[n]}$.

Prop : Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs de E. Notons $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$. On a $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)=\det A$.

Prop : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Notons $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On a $\det f=\det A$.

b) propriétés

Prop : $\det I_n=1$

Prop : $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall A\in M_n(\mathbb{K}),\det(\lambda.A)=\lambda^n\det A$.

Théorème :

$\forall A,B\in M_n(\mathbb{K}),\det AB=\det A.\det B$.

Cor : $\forall A\in M_n(\mathbb{K}),\forall m\in\mathbb{N},\det(A^m)=(\det A)^m$.

Théorème :

Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

(i) A est inversible

(ii) $\det A\neq 0$

De plus, si tel est le cas : $\det A^{-1}=1/\det A$.

Cor : L'application $\det:\begin{cases}GL_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}^*\\ A\mapsto\det A\end{cases}$ est un morphisme de groupes.

Déf : Le noyau de ce morphisme de groupes est noté $SL_n(\mathbb{K})=\{A\in M_n(\mathbb{K})/\det A=1\}$.

On l'appelle groupe spécial linéaire d'ordre n.

Prop : $\forall A\in M_n(\mathbb{K}),\det {}^tA=\det A$.

III. Calculs de déterminants

1°) Premiers résultats

Soit $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{K})$. Partons de $\det A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}$.

Pour $n=1$, $A=(a)$, $\mathfrak{S}_1=\{\mathrm{Id}\}$ et donc $\det A=a$.

Pour $n=2$, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $\mathfrak{S}_2=\{\mathrm{Id},(1,2)\}$.

$\det A=\varepsilon(\mathrm{Id})ad+\varepsilon((1,2))cb=ad-bc$.

Pour $n=3$, $A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{pmatrix}$, $\mathfrak{S}_3=\{\mathrm{Id},(1,2),(2,3),(3,1),(1,2,3),(1,3,1)\}$

$\det A=\dots=(ab'c''+a'b''c+a''bc')-(a''b'c+a'b''c+ab''c')$.

On retient : (règle de Sarrus)

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & a & b & & \\ a' & b' & c' & a' & b' & & \\ a'' & b'' & c'' & a'' & b'' & & \\ - & - & - & & + & + & + \end{array}$$

2°) Déterminant d'une matrice triangulaire

Prop : Soit $A=(a_{i,j})\in T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $T_n^-(\mathbb{K})$). On a : $\det A=\prod_{i=1}^{n}a_{i,i}$.

Théorème : (admis)

Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$ un matrice triangulaire par blocs de la forme :

$A=\left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ (resp. $A=\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & C \end{array}\right)$) avec B,C carrées. On a $\det A=\det B.\det C$.

3°) Opérations sur les déterminants

Théorème :

Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1,\dots,C_n$.

Si l'une des colonnes de A est nulle alors $\det A=0$.

Si les colonnes de A sont liées alors $\det A=0$.

Si on permute les colonnes de A selon une permutation σ alors $\det A$ est multiplié par $\varepsilon(\sigma)$.

Si on multiplie une colonne de A par un scalaire λ alors $\det A$ est multiplié par λ.

Si on scinde une colonne C_j de A en $C_j'+C_j''$ alors $\det A$ est la somme des deux déterminants obtenus.

Si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A, le déterminant de A est inchangé.

Cor : Par transposition, le théorème ci-dessus se généralise à la manipulation de lignes au lieu de colonnes.

4°) Développement du déterminant selon une rangée

Soit $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{K})$.

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}A_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\Delta_{i,j} \text{ avec } A_{i,j}=(-1)^{i+j}\times\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \hat{a}_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n-1]} \text{ et } \Delta_{i,j}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \hat{a}_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

Déf : Cette relation est appelée développement de $\det A$ selon la $j^{\text{ème}}$ colonne. Le coefficient $\Delta_{i,j}$ est appelé mineur de A d'indice (i,j). Le coefficient $A_{i,j}=(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ est appelé cofacteur de A d'indice (i,j).

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}A_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\Delta_{i,j}$$

Déf : Cette relation est appelée développement de $\det A$ selon la $i^{\text{ème}}$ ligne.

IV. Applications des déterminants

1°) Formules de Cramer

Théorème :

Soit Σ un système à n équations et n inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,n}x_n=b_n \end{cases}$$ d'équation matricielle $AX=B$.

Le système Σ est de Cramer ssi $\det A\neq 0$.

De plus, si tel est le cas, son unique solution est le n uplet $(x_1,\dots,x_n)$ avec

$$\forall 1\le j\le n, x_j=\frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}.$$

2°) Comatrice

Soit $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{K})$. Pour $1\le i,j\le n$, on note $A_{i,j}$ le cofacteur d'indice (i,j) de la matrice A.

$$A_{i,j}=(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \hat{a}_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Déf : On appelle comatrice de A la matrice des cofacteurs de A, on la note $\mathrm{com}(A)=(A_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{K})$.

Théorème :

$\forall A\in M_n(\mathbb{K}),\ {}^t\mathrm{com}(A).A=A.{}^t\mathrm{com}\,A=\det A.I_n$.

Cor : Si $\det A\neq 0$ alors $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{com}(A)$.

3°) Détermination du rang d'une matrice

Déf : Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice extraite de A toute matrice formée en retirant un certain nombre de lignes et/ou de colonnes de A.

Prop : Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Toute matrice extraite de A est de rang inférieur au rang de A.

Déf : Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $1\le r\le \min(n,p)$.

On appelle déterminant extrait de A d'ordre r, tout déterminant d'une matrice carrée d'ordre r extraite de A.

Théorème :

Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

Le rang de A est l'ordre maximal des déterminants non nuls extraits de A.

4°) Orientation d'un R-espace vectoriel de dimension finie

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$.

Déf : Soit $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ deux bases de E.

On dit que la base $\mathcal{B}'$ a la même orientation que $\mathcal{B}$ ssi $\det_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'>0$.

Sinon, on dit que $\mathcal{B}'$ est d'orientation opposée à celle de $\mathcal{B}$.

Prop : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

Si $\mathcal{B}$ a même orientation que $\mathcal{B}'$ alors $\mathcal{B}'$ a même orientation que $\mathcal{B}$.

Prop : Soit $\mathcal{B},\mathcal{B}',\mathcal{B}''$ trois bases de E.

$\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ ont même orientation ssi elles ont toutes deux même orientation que $\mathcal{B}$ ou qu'elles sont toutes deux d'orientation opposées à $\mathcal{B}$.

Déf : Orienter le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E à partir d'une base $\mathcal{B}$ c'est adopter le vocabulaire suivant :
Toute base de E de même orientation que $\mathcal{B}$ est dite directe.
Toute base de E d'orientation opposée à celle de $\mathcal{B}$ est dite indirecte.
La base $\mathcal{B}$ est alors dite base orientée de référence.

Déf : On dit alors que D est un axe vectoriel.

En particulier :

Dans l'espace géométrique orienté $\mathcal{B}=(i,j,k)$:

$(i,j,k),(k,i,j),(j,k,i)$ sont directes

$(i,k,j),(k,j,i),(j,i,k)$ sont indirectes.